Die Entwicklung von Energie-Impuls-Wellenfunktionen und die Klein-Gordon-Gleichung

von Gunter Berauer

1. Einleitung

Die elementare Wellenfunktion eines beliebigen freien Objekts oder Teilchens (d.h. einer freien Welle) hinsichtlich der Eigenschaften Energie E (E ist ein Skalar) und Impuls **p** (**p** ist ein Vektor mit den drei Raumkomponenten p_x, p_y, und p_z) lautet

$$\Psi(t,\mathbf{x}) = \Psi_0 \exp\,[(i\cdot 2\pi/h)(Et - \mathbf{px})]. \qquad (1)$$

Darin ist i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, h das Planck'sche Wirkungsquantum, t der Zeitparameter, **x** der dreidimensionale Ortsvektor und **px** das Skalarprodukt der Vektoren **p** und **x**. Ψ_0 und damit auch Ψ können ein i.a. komplexer Skalar oder ein komplexer Vektor in einem n-dimensionalen Raum sein (oder im Prinzip auch ein beliebiger Tensor höherer Ordnung). Darin ist $E = h\cdot f$ und f die Frequenz der dem Teilchen zugeordneten Welle. Um welche Art physikalischer Größe es sich bei Ψ handelt und ob es sich um einen Skalar oder einen Vektor handelt, hängt von der Art des Teilchens bzw. Objektes ab. Ψ_0 steht für die Amplitude der Welle, sein Betragsquadrat ist quantenmechanisch als Wahrscheinlichkeitsdichte dafür aufzufassen, dass an der Stelle **x** zur Zeit t das Objekt beobachtet werden kann. Im Falle des hier betrachteten freien Objekts oder einer freien Welle ist diese harmonisch und der Amplitudenvektor Ψ_0 (und damit auch die genannte Wahrscheinlichkeitsdichte) eine Konstante, unabhängig von Ort und Zeit.

Hinsichtlich anderer Eigenschaften als Energie und Impuls (wie etwa die Farbladungen der Quarks oder der Lebenszustand einer Katze in Schrödingers Gedankenexperiment) mögen andere Wellenfunktionen als die nach Gleichung (1) zur Beschreibung nötig sein.

2. Die Lorentz-Transformation

Nach der speziellen Relativitätstheorie gilt für die Beschreibung von Bewegungen in gegeneinander bewegten Koordinatensystemen die Lorentztransformation. Sind t und **x** die Zeit und der Ortsvektor eines Raum-Zeit-Punktes in *einem* Koordinatensystem, dann sieht man diese Koordinaten in einem dazu mit dem konstanten Geschwindigkeitsvektor **v** bewegten *zweiten* Koordinatensystem als t' und **x'** nach den Tranformationsgleichungen als

$$t' = \gamma\cdot(t - \mathbf{vx}/c^2) \quad \text{und} \quad \mathbf{x'} = \gamma\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Oder in Matrix-Schreibweise mit der Transformationsmatrix $\mathbf{\Lambda}$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}\cdot \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Lambda} = \gamma\cdot\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v}/c \\ -\mathbf{v}/c & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Schreibt man die Vektoren **x** und **v** aus, also $\mathbf{x} = (x,y,z)^T$ und $\mathbf{v} = (v_x,v_y,v_z)^T$ dann ergeben sich die 4D-Transformationsmatrix $\mathbf{\Lambda}_4$ und der 4D-Orts-Zeit-Vektor $\mathbf{x}_4$

$$\mathbf{\Lambda}_4 = \gamma\cdot\begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ -v_x/c & 1 & 0 & 0 \\ -v_y/c & 0 & 1 & 0 \\ -v_z/c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Klassische gegeneinander verschobene oder verdrehte Koordinatensysteme sind hier nicht einbezogen, da diese relativistisch weniger von Bedeutung sind. Bei Verdrehungen müsste z.B. die 3x3-Einheitsmatrix unten rechts in der Transformationsmatrix durch eine Drehmatrix ersetzt werden.

Lorentzinvariant werden Größen (Skalare, Vektoren, Tensoren) genannt, deren in einem Koordinatensystem beobachtete Werte man durch Anwendung der Lorentztransformation in die Werte umrechnen kann, die man in einem zu diesem mit der konstanten Geschwindigkeit **v** bewegten anderen Koordinatensystem beobachten würde. Sind die Ergebnisse dabei in allen Koordinatensystemen auch noch identisch, dann spricht man von einer **Lorentzkonstanten**, und ist diese Konstante ein Skalar, dann spricht man von einem **Lorentzskalar**.

Analog zum üblichen 3D-Nablaoperator $\mathbf{\nabla} := \mathbf{\nabla}_{x3} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ (der hochgestelle Index T steht für „transponiert“) kann man auch einen vierdimensionalen Operator $\mathbf{\nabla}_{x4} = (\partial/\partial ct, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ einführen. Für diese Operatoren gilt offensichtlich $\mathbf{\nabla}_{x3}\,\mathbf{x} = \mathbf{\nabla}\,\mathbf{x} = 3$ und $\mathbf{\nabla}_{x4}\,\mathbf{x}_4 = 4$. Wie man leicht zeigen kann gilt auch

$$\nabla_{x4}\,(\mathbf{\Lambda}_4\cdot\mathbf{x}_4) = \mathrm{Spur}\,(\mathbf{\Lambda}_4) = 4\gamma \tag{4a}$$

Ferner gilt für jeden Vierervektor $\mathbf{U} = (U_{ct}, U_x, U_y, U_z)^T$ (die erste Komponente kann man als in Zeitrichtung weisend interpretieren, die anderen sind Komponenten in den drei Raumrichtungen) und für jedes Paar von Zeit-Ortsvektoren $\mathbf{z}_4$ und $\mathbf{x}_4$ die formale Identität

$$\nabla_{z4}\,\mathbf{U}(\mathbf{z}_4) = \nabla_{x4}\,\mathbf{U}(\mathbf{x}_4),$$

weil sich durch Umbenennung der Variablen das Ergebnis nicht ändern kann. Mit dem Lorentz-transformierten Zeit-Orts-Vektor $\mathbf{z}_4 = \mathbf{\Lambda}_4\cdot\mathbf{x}_4$ und dem so transformierten Vierervektor $\mathbf{U}'(\mathbf{x}_4) = \mathbf{U}(\mathbf{z}_4)$ erhält man schließlich

$$\nabla_{x4}\,\mathbf{U}'(\mathbf{x}_4) = \nabla_{x4}\,\mathbf{U}(\mathbf{z}_4) = [\nabla_{z4}\,\mathbf{U}(\mathbf{z}_4)]\cdot[\nabla_{x4}\,\mathbf{z}_4] = [\nabla_{x4}\,\mathbf{U}(\mathbf{x}_4)]\cdot[\nabla_{x4}\,(\mathbf{\Lambda}_4\cdot\mathbf{x}_4)] = 4\gamma\cdot[\nabla_{x4}\,\mathbf{U}(\mathbf{x}_4)]. \tag{4b}$$

Diese Ergebnisse werden weiter unten noch gebraucht.

3. Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung und ihre allgemeine Lösung

Nun stellt sich die Frage, wie sich Wellenfunktionen über Raum und Zeit entwickeln, wenn z.B. einmal für sie ein Keim gesetzt wurde, etwa dadurch, dass das Objekt zum Zeitpunkt t_1 am Ort $\mathbf{x_1}$ beobachtet und dann wieder sich selbst überlassen wurde. Zum Zeitpunkt der Beobachtung ist in diesem Fall der Amplitudenvektor durch eine Dirac’sche δ- Funktion der Form $\delta(t\text{-}t_1, \mathbf{x}\text{-}\mathbf{x_1})$ beschrieben, die nur bei t_1, $\mathbf{x_1}$ einen Peak mit dem Zeit-Raum-Volumen 1 besitzt und sonst überall verschwindet und die sich danach in Raum und Zeit allmählich wieder verbreitert oder verschmiert bis die Welle durch eine beobachtende Wechselwirkung wieder kollabiert.

Eine Differentialgleichung, mit der die Entwicklung der Wellenfunktionen (und damit auch das Verschmieren der δ- Funktion im obigen Beispiel) beschrieben werden kann, findet man durch partielle Differentiationen von Gleichung (1) nach Zeit und Ort. Damit erhält man:

$$\partial\Psi/\partial t = i\cdot(2\pi/h)\cdot E\cdot\Psi \quad \text{und} \quad \mathbf{\nabla}\cdot\Psi = -\,i\cdot(2\pi/h)\cdot\mathbf{p}\cdot\Psi \quad \text{und} \tag{5}$$

$$\partial^2\Psi/\partial t^2 = -\,(2\pi/h)^2\cdot E^2\cdot\Psi \quad \text{und} \quad \mathbf{\nabla}^2\cdot\Psi = \Delta\cdot\Psi = -\,(2\pi/h)^2\cdot\mathbf{p}^2\cdot\Psi \tag{6}$$

Darin steht $\partial/\partial t$ für die partielle Ableitung nach der Zeit und der Nabla-Operator ∇ für die partielle Ableitung nach dem Ort. ∇ ist der oben schon eingeführte Vektor-Operator $\mathbf{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$. Seine zweifache Anwendung wird zum (skalaren) Δ-Operator $\Delta = \mathbf{\nabla}^2 = \partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$. Wegen den Gleichung (5) wird auch von einer Interpretation von Energie und Impuls als partielle Differentialoperatoren (und auch von der ersten Quantisierung) gesprochen:

$$\partial/\partial t = i\cdot(2\pi/h)\cdot E \quad \text{und} \quad \mathbf{\nabla} = -\,i\cdot(2\pi/h)\cdot\mathbf{p}. \tag{7}$$

Das ist aber mehr als nur eine „Interpretation“, denn die Gleichungen (5) lassen wohl kaun andere Interpretation zu. U.a. aus der Lorentztransformation folgen für Energie und Impuls die Beziehungen $E = hf = \gamma mc^2$ und $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. Mit γ nach Gleichung (2) lässt sich das umschreiben in die relativistische Energie-Impuls-Beziehung der Form

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2 \quad \text{oder} \quad E = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2}\,. \tag{8}$$

Darin ist m die (Ruh-)Masse des Objekts und c der Betrag der Lichtgeschwindigkeit. Multipliziert man die linke Gleichung von (8) mit Ψ und wendet die Gleichungen (6) an, dann ergibt sich die

Klein-Gordon-Gleichung

$$(1/c^2)\cdot\partial^2\Psi(t,\mathbf{x})/\partial t^2 - \Delta\Psi(t,\mathbf{x}) + (2\pi mc/h)^2\cdot\Psi(t,\mathbf{x}) = 0. \qquad (9)$$

Mit dem D'Alambert-Operator $\Box = (1/c^2)\cdot\partial^2/\partial t^2 - \Delta$ und dem reduzierten Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$ erhält man schließlich die Form

$$\Box\,\Psi(t,\mathbf{x}) + (mc/\hbar)^2\cdot\Psi(t,\mathbf{x}) = 0. \qquad (10)$$

Aus der Herleitung folgt zwar bereits, dass jede Welle Ψ nach Gleichung (1), bei der E und $\mathbf{p}$ durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung miteinander verknüpft sind, die Gleichung (10) in allen gegeneinander bewegten Koordinatensystemen erfüllt (also immer das Ergebnis Null liefert, unabhängig davon, ob es sich bei Ψ um einen Skalar oder einen Vektor handelt). Indem man die Koordinaten $t,\mathbf{x}$ über die Lorentz-Transformation (mit Gleichung (2)) in ein zu diesem bewegtes Koordinatensystem $t',\mathbf{x}'$ umrechnet und die so umgerechnete Wellenfunktion Ψ in Gleichung (10) einsetzt, lässt sich dies nochmals verifizieren, weil dann die Gleichung auch wieder das Ergebnis Null liefert. Welcher Art physikalischer Größe das Feld in der Praxis entspricht (bei Photonen sind es z.B. die elektromagnetischen Feldgrößen), ist dabei mathematisch unerheblich, weil man die Einheit der Feldgröße in Gleichung (10) herauskürzen und so ihr Betragsquadrat auch immer als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren kann.

Weil Gleichung (10) eine lineare partielle Differentialgleichung ist, wird sie auch von jeder beliebigen komplexen Überlagerung von Wellen nach Gleichung (1) gelöst, sofern jede von ihnen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllt. Die allgemeine Lösung der Gleichung liefert dann das Integral

$$\Psi(t,\mathbf{x}) = \int \mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{p})\cdot\exp\left\{(i/\hbar)\cdot[\pm\sqrt{(mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2}\cdot t - \mathbf{px}]\right\}\cdot d^3p \qquad (10)$$

mit Fourier-transformierbaren, zeit- und orts***un***abhängigen Vektoren $\mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{p})$. Durch solche Überlagerungen lassen sich auch Gesamtwellenbündel mit zeit- und orts***ab***hängigen Amplituden und damit auch zeit- und orts***ab***hängige Auftrittswahrscheinlichkeiten von Teilchen darstellen. Anhand im Einzelfall vorliegender Anfangs- und Randbedingungen kann man dann aus (10) die zeitlich-räumliche Entwicklung der Wellenfunktion für jeden Fall ermitteln.

Da alle Wellen nach Gleichung (10) Lorentz-invariant die Klein-Gordon-Gleichung lösen, und dabei immer dasselbe Ergebnis **Null** (im Allgemeinen eine vektorielle **0**) liefert, ist die Gleichung nach der Definition in Kapitel 2 eine **Lorentzkonstante**.

Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt also relativ zum Beobachter bewegte Objekte mit der Masse m und ordnet diesen eine Welle mit (wie oben schon gesagt) der Energie $E = hf = \gamma mc^2$ und dem Impuls $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ zu. Bezeichnet man mit v den Betrag von $\mathbf{v}$ und mit p den Betrag von $\mathbf{p}$, dann gelten die Beziehungen

$p = h/\lambda$	mit λ = Wellenlänge der dem Objekt zugeordneten Welle, und	(11)
$E/p = \lambda f = c^2/v$	ihrer Phasengeschwindigkeit.	(12)

Wie man sieht, ist die Phasengeschwindigkeit dieser „De Broglie-Wellen" immer größer als die Lichtgeschwindigkeit. Geht m gegen Null, dann gibt's für den Term $m\cdot\gamma$ nach Gleichung (2) nur von Null verschiedene Lösungen, wenn v gegen c geht, Gleichungen (11) und (12) gelten dann immer noch und die Phasengeschwindigkeit entspricht in diesem Fall der Lichtgeschwindigkeit. Der Formalismus beschreibt mit m = 0 elektromagnetische Wellen im Freiraum und die Klein-Gordon-Gleichung liefert im Spezialfall m = 0 mit einer vektoriellen Wellenfunktion damit eben auch eine Beschreibung der Photonen. Bei einem unbewegten massiven Objekt werden die Wellenlänge und die Phasengeschwindigkeit unendlich und die Welle des Teilchens degradiert zu einer orts***un***abhängigen Schwingung der Feldgröße, die überall im Raum synchron vorliegt. Ihre Frequenz beträgt dann $f = \pm mc^2/h$; einem, mit $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Ws^2 und $c = 3\cdot10^8$ m/s^2, auch bei leichten Teilchen extrem hohen Wert. - Weiteres zur Rolle der Klein-Gordon-Gleichung in der Teilchenphysik und über den Charakter der Feldgrößen findet sich in den folgenden Kapiteln.

Es muss hier ergänzt werden, dass für Teilchen und Objekte nicht nur (wie eingangs schon erwähnt) hinsichtlich anderer Eigenschaften als Energie und Impuls evtl. ganz andere Wellenfunktionen zur Beschreibung nötig sind, sondern dass auch in den Fällen, in denen die Klein-Gordon-Gleichung relevant ist, die Teilchen damit noch nicht immer ausreichend beschrieben sind. Oft sind weitere Gleichungen erforderlich, um ihre quantenmechanischen Eigenschaften vollständig zu erfassen. Darauf wird in den folgenden Kapiteln im Einzelfall noch hingewiesen.

4. Die Rolle der Klein-Gordon-Gleichung bei der Beschreibung von Elementarteilchen

4.1. Skalare Wellenfunktionen und Spin 0 -Teilchen

Nach der einschlägigen Literatur ist die Dynamik der Spin 0 -Teilchen, wie etwa der Pionen, aber auch größerer Spin-neutraler Objekte bis hin zu großen Molekülen und sogar Kieselsteinen mit der Klein-Gordon-Gleichung und einer skalaren Wellenfunktion $\Psi(t,\mathbf{x})$ offenbar vollständig beschrieben. Man kann sich die Größe Ψ in diesem Fall wie eine Art Druck vorstellen, der aber nicht mit einer Bewegung, wie bei Schallwellen z.B. mit der „Schallschnelle", in Wechselwirkung steht. - Möglicherweise sind je nach Art des Spin 0 -Teilchens bzw. Objekts noch weitere Gleichungen zur vollständigen Beschreibung erforderlich. Das trifft vermutlich auch auf geladene Spin 0 -Objekte zu, da ja die Ladung in der Klein-Gordon-Gleichung nicht explizit erfasst ist. Das Feld des Higgs-Bosons, ebenfalls ein (sehr massives) Spin 0 -Teilchen, wird in der Higgs-Theorie über freie Teilchen mit imaginärer Energie erklärt. Unklar bleibt für den Autor, inwieweit die Klein-Gordon-Gleichung auch die Dynamik dieses Teilchen beschreibt. In der Literatur hat der Autor darüber nichts gefunden.

4.2 Vektorielle Wellenfunktionen und Spin 1 -Teilchen

Zu den Austauschteilchen oder Bosonen des Standard-Modells der Teilchenphysik zählen acht verschiedene Gluonen, die für die starke Kernkraft verantwortlich sind und damit den Zusammenhalt der Quarks in den Atomkernen bewirken. Dann das Photon, das für die elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich ist, und schließlich zählen die W- und Z-Bosonen dazu, die die schwache Wechselwirkung beschreiben und auch für den radioaktiven Zerfall verantwortlich sind.

Gluonen und Photonen besitzen keine (Ruh-)Masse, die beiden W-Bosonen (eines ist positiv, das andere negativ geladen) und das ladungsneutrale Z-Boson sind massiv. Sie haben alle den Spin 1, das heißt ihr Eigendrehimpuls hat den Wert $S = h/2\pi$ und die Feldgröße der Wellenfunktion dieser Teilchen ist deshalb ein 3D-Vektor. Den Spin kann man sich, nach Stephen Hawking, als die reziproke Anzahl der 360 Grad-Drehungen vorstellen, die nötig sind, damit ein Gebilde wieder so aussieht wie vorher, und diese Anzahl ist bei Vektoren gerade 1. Eine andere Idee wäre, sich den Spin als das Verhältnis von Drehfrequenz f_V des Feldvektors und der aus der Teilchenenergie abgeleiteten Frequenz $f_E = E/h$ vorzustellen. Beide Vorstellungen führen aber in gewissen Aspekten zu Schwierigkeiten.

Die acht Gluonen haben wegen ihrer Masselosigkeit gewisse Ähnlichkeit mit den Photonen, sind aber wegen ihrer Farbladungen auch wieder von ganz anderen Charakter. Jedes wird durch eine eigene skalare Farbladungs-Wellenfunktion beschrieben. Ob und inwieweit bei diesen Teilchen und ihren Wellenfunktionen die Klein-Gordon-Gleichung eine Rolle spielt, ist dem Autor nicht bekannt, die Gluonen sollen deshalb hier nicht weiter betrachtet werden.

Dann gibt es noch das masselose Austauschteilchen der Gravitationsfelder, das sogenannte Graviton. Dieses ist aber bisher nicht zweifelsfrei nachgewiesen worden. Außerdem soll es über einen Spin-Wert von 2 verfügen und gehört deshalb auch nicht in dieses Kapitel.

Neben den bisher genannten Elementarteilchen gibt es noch die Fermionen mit dem Spin ½, die wir in Kapitel 4.3 betrachten werden. Verbleiben für dieses Kapitel über Spin 1 -Teilchen nur noch die massiven W- und Z-Bosonen und die masselosen Photonen.

4.2.1 Die massiven Spin 1 -Teilchen

Die Wellenfunktion **U** der W- und Z-Bosonen ist (nach Wikipedia) durch ein verallgemeinertes elektrisches Potential Φ und ein verallgemeinertes magnetisches Potential **A** beschrieben:

$$\mathbf{U} = (\Phi/c,\mathbf{A})^T \tag{13}$$

A ist ein 3D Vektor und Φ ein Skalar, **U** also ein 4D-Vektor und beides sind i.a. komplexe Größen. Wie oben schon erwähnt, ist die erste Koordinate von **U** als Koordinate in Richtung der Zeit auffassen und die anderen drei weisen in die drei üblichen Raumrichtungen. **U** gehorcht der sogenannten Proca-Gleichung, die sich (ebenso nach Wikipedia) mit den Bezeichnungen der Vektoranalysis in Form der zwei Gleichungen

$$\Box\, \Phi(t,\mathbf{x}) + (mc/\hbar)^2 \cdot \Phi(t,\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \Box\, \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) + (mc/\hbar)^2 \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{14}$$

schreiben lässt. Dabei handelt sich jeweils offenbar um die Klein-Gordon-Gleichung, einmal in skalarer Form und einmal in Vektorform. Fasst man beide Gleichungen zusammen, so erhält man die Klein-Gordon-Gleichung angewandt auf den 4D-Vektor **U**.

$$\Box\, \mathbf{U}(t,\mathbf{x}) + (mc/\hbar)^2 \cdot \mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{15}$$

Ferner gilt noch die sogenannte Lorenz-Eichung (Lorenz ist nicht der Lorentz, auf den die Lorentz-Transformation zurückgeht):

$$(1/c^2) \cdot \partial\Phi/\partial t + \nabla\mathbf{A} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial(\Phi/c)/\partial ct + \nabla\mathbf{A} = 0. \tag{16}$$

Verwendet man den oben schon eingeführten 4D-Nablaoperator $\nabla\mathbf{x}_4 = (\partial/\partial ct, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ und den Viererpositionsvektor $\mathbf{x}_4 = (ct,x,y,z)^T$, dann lässt sich Gleichung (16) als verschwindende „Viererdivergenz“ schreiben:

$$\nabla_{x4}\, \mathbf{U}(\mathbf{x}_4) = 0. \tag{17}$$

Unter Anwendung der Lorentz-Transformation nach Gleichung (4) auf die Zeit-Orts-Koordinaten von $\mathbf{x}_4$, erhält man $\mathbf{z}_4 = \mathbf{\Lambda}_4 \cdot \mathbf{x}_4$ und für die Lorentztransformierte von **U**, nennen wir sie **U‘**

$$\mathbf{U}'(\mathbf{x}_4) = U(\mathbf{z}_4) = \mathbf{U}(\mathbf{\Lambda}_4\mathbf{x}_4). \tag{18}$$

Wendet man nun den 4D-Nablaoperator auf diesen transformierten Feldvektor an, so ergibt sich mit (4a,b) und (17)

$$\nabla_{x4}\mathbf{U}'(\mathbf{x}_4) = \nabla_{x4}\mathbf{U}(\mathbf{z}_4) = [\nabla_{z4}\mathbf{U}(\mathbf{z}_4)] \cdot [\nabla_{x4}(\mathbf{z}_4)] = \nabla_{x4}\mathbf{U}(\mathbf{x}_4) \cdot 4\gamma = 0. \tag{19}$$

Somit ist die Viererdivergenz Lorentz-invariant und sogar ein Lorentzskalar.

Sicher kann man auch hier, im Falle der hier betrachteten masse-behafteten W- und Z- Bosonen, die in der Elektrodynamik und bei den Feldern der masselosen Photonen üblichen Feldgrößen der elektrischen Feldstärke **E** und der magnetischen Induktion **B** entsprechend der Gleichungen (21) des folgenden Kapitels formulieren. Inwiefern sich die Rolle dieser Größen bei den massiven Bosonen von der bei den Photonen unterscheidet, entzieht sich aber der Kenntnis des Autors.

Zumindest für die geladenen W-Bosonen ist sicher auch noch zu ihrer vollständigen Beschreibung ihre Wechselwirkung mit anderen Feldern erforderlich. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden.

Für den Fall m = 0 geht die Proca-Gleichungen, die aber nichts weiter ist, als die Klein-Gordon-Gleichung, in die Maxwell‘sche Wellengleichung für den Freiraum über; die Klein-Gordon-Gleichung gilt also in diesem Spezialfall auch für Photonen. Auf spezielle, in der Maxwell-Theorie übliche Schreibweisen werden wir in Kapitel 4.2.2 noch eingehen. In der Literatur findet man vielfach (auch bei Wikipedia) die Aussage, die Klein-Gordon-Gleichung sei ***nur*** bei Spin-freien Teilchen mit skalaren Wellenfunktionen anwendbar. Andere Seiten bei Wikipedia, wie die Seite zur Proca-Gleichung, widersprechen dem aber offensichtlich. Die Aussage dürfte auch falsch sein, denn die Klein-Gordon-Gleichung ist, wie wir in Kapitel 4.3 noch sehen werden, sogar auch bei den Fermionen von Bedeutung.

4.2.2 Photonen

Wie in Kapitel 4.2.1 schon gesagt, gehen die Gleichungen für Photonen als Grenzfall m = 0 aus den Gleichungen für die W- und Z-Bosonen hervor, und damit ergeben sich aus den Gleichungen (14) die elektromagnetischen Feldgleichungen für den Freiraum in der Form:

$$\Box\, \Phi(t,\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \Box\, \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und damit} \quad \Box\, \mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{20}$$

Die in der Maxwell-Theorie üblichen, praktisch messbaren (vektoriellen) Feldgrößen der magnetischen Induktion **B** und der elektrischen Feldstärke **E** erhält man aus Φ und **A** über die Gleichungen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\Phi \tag{21}$$

(× steht darin für das Vektorprodukt). Und damit gilt für die Felder **E** und **B** im Freiraum ebenso

$$\Box\, \mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \Box\, \mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{22}$$

Auch hier kann die Lorenz-Eichung für **U** nach Gleichung (16) vorgenommen oder als gegeben angenommen werden, die für eine Lorentz-Invarianz der Viererdivergenz von **U** sorgt. Eine entsprechende Invarianz lässt sich für die Felder **B** und **E** allerdings nicht formulieren.

Dann gibt es in der Maxwelltheorie noch Gleichungen, die die Anwesenheit von Ladungs- und Stromdichten berücksichtigen, auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll. Diese Materialgleichungen, die Gleichungen (20) bis (22) und die ggf. vorliegenden Rand- und Anfangsbedingungen ermöglichen eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Felder, ihrer zeitlich-räumlichen Entwicklung und damit des quantenmechanischen Wellencharakters von Photonen.

Aus einer der Materialgleichungen folgt, dass in ladungsfreien Raumbereichen $\nabla\mathbf{E} = 0$ sein muss. Das hat zur Folge, dass im Freiraum der Feldvektor immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht, also senkrecht auf dem Impulsvektor (das gilt ebenso für das B-Feld). Zum Beweis: Im Freiraum kann man das E-Feld, etwa eines einzelnen Photons, als $\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \exp\{(i/\hbar)\cdot[Et - \mathbf{px}]\}$formulieren. Die Anwendung des Nabla-Operators auf dieses Feld ergibt $\nabla\mathbf{E} = -\,\mathbf{pE_0} \exp\{(i/\hbar)\cdot[Et - \mathbf{px}]\}$. Und das kann nur dann für alle t, **x** Null sein, wenn $\mathbf{E_0}$ senkrecht auf **p** steht. Elektromagnetische Wellen sind im Freiraum also immer Transversalwellen. Und dabei stehen im Freiraum (hier ohne Beweis) die Vektoren **E** und **B** auch immer senkrecht aufeinander. Weil das Photon masselos ist, liegt der Spinvektor oder Drehimpulsvektor immer parallel oder antiparallel zum Impulsvektor und sein Betrag ist $S = E/(2\pi f) = hf/(2\pi f) = \hbar$ (wie oben schon gesagt). Das Feld des Photons ist rechts- oder linksdrehend zirkular polarisiert. Wenn sich zwei Photonen gleicher Frequenz treffen, können sich die Drehungen der Feldvektoren allerdings u.U. auch kompensieren, sodass sich eine linear polarisierte Summenwelle ergibt.

4.3 Wellenfunktionen der ½-spinnigen Fermionen

Zu den Fermionen zählen die Quarks als die massiven Kernbausteine und die zwar auch massebehafteten, aber viel leichteren sogenannten Leptonen. Man unterscheidet entsprechend ihrer Farbladung sechs Typen von Quarks; sie sind elektrisch mit +2/3 oder –1/3 der Elementarladung e geladen. Zu den Leptonen zählen das Elektron mit der Ladung – e und seine schwereren Brüder Myon und Tauon sowie drei Sorten von Neutrinos (das Elekton-, das Myon- und das Tauneutrino). Alle besitzen den Spin ½. Auch viele aus diesen Elementarteilchen zusammengesetzte Teilchen und Objekte wie das Neutron, das Proton, aber auch größere Gebilde können den Spin ½ aufweisen.

Sich ein Spin ½ -Teilchen, wie Hawking vorschlug, so vorzustellen, das es erst nach zweimaliger Drehung um volle 360 Grad wieder so aussieht wie vorher, ist recht schwer. Diesen Effekt kann man aber an einem Foucault'schen Pendel recht gut beobachten. So muss sich die Erde *zweimal* um die eigene Achse drehen, bis sich die Schwingungsebene eines am 30. Breitengrad aufgehängten Pendels gerade *einmal* um seine Achse gedreht hat, bis die Anordnung aus Erde und Pendel also wieder genauso aussieht wie vorher. Und etwa am 14. Breitengrad muss die Erde sich sogar viermal drehen, bis das Anfangsbild wieder hergestellt ist. Wie man an diesem Beispiel sieht, wird hier nicht nur ein isoliertes Objekt (die Erde oder das Pendel) betrachtet, sondern ein Objekt zusammen mit Teilen der

Umwelt als ein verbundenes System aufgefasst. Deshalb kann man hier auch von „orientation entanglement“ sprechen, wie der Autor das schon irgendwo im Internet gefunden hat. Man könnte das vielleicht mit „verstrickter Orientierung“ übersetzen.

Wenn man zur Veranschaulichung einmal den Spin mit dem klassischen Drehimpuls eines makroskopischen Objekts gleichsetzt, dann kann man sich den Wert ½ vielleicht auch, sicher unsauber, dafür aber anschaulich wie folgt erklären: Bezeichnet man mit Θ das Trägheitsmoment eines Körpers, mit $\boldsymbol{\omega}$ den Vektor der Winkelgeschwindigkeit, E seine Rotationsenergie und $\boldsymbol{\vartheta}$ den Drehimpulsvektor, dann gelten die klassischen Gesetze

$$E = \tfrac{1}{2}\,\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}^2 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \Theta\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{23}$$

Nimmt man nun an, dass die gesamte Energie in der Rotation des Körpers steckt, und verwendet auch hier die für Photonen gültige Beziehung $S = E/\omega$ für den Spin, dann ergibt sich

$$S = E/\omega = \tfrac{1}{2}\,\vartheta. \tag{24}$$

Der Spin stellt sich in dieser Überlegung tatsächlich als nur halb so groß dar wie der Drehimpuls, was den Spin-Wert ½ zumindest plausibel machen kann. Es sei aber hinzugefügt, dass es sich hier wirklich nur um eine unsaubere Veranschaulichung handelt.

Nun zu den Wellenfunktionen von Spin ½ -Teilchen. Diese Teilchen werden durch die Dirac-Gleichung beschrieben (siehe Wikipedia). In dieser Gleichung werden die vier skalaren Komponenten einer 4D-Wellenfunktion, des sogenannten Spinors, verkoppelt. Die Gleichung wird auch als Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung bezeichnet, welche, zweifach angewendet, die Komponenten entkoppelt und dabei exakt auf die Klein-Gordon-Gleichung führt. Jede Komponente des Spinors erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung und damit natürlich auch der ganze (vektorielle, vierdimensionale) Spinor. Das gilt zumindest für ungeladene Teilchen. Bezeichnet man den Spinor wieder mit **U**, dann gilt für ihn exakt die Klein-Gordon-Gleichung (10) in der Form

$$\Box\,\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) + (mc/\hbar)^2\cdot\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{25}$$

Natürlich sind die verschiedenen Fermionen mit dieser Gleichung nicht vollständig beschrieben, auch die Dirac-Gleichung als Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung ist zur Beschreibung erforderlich, und bei geladenen Teilchen ist auch die elektromagnetische Wechselwirkung zu betrachten. Ferner sind mit dieser Gleichung sicher auch nicht die Eigenschaften der Quarks adäquat oder vollständig erfasst. Für jedes der sechs Quarks gibt es eine auf die Farbladungen bezogene Wellenfunktion mir drei Komponenten. Wie diese mit der Spinor-bezogenen Gleichung (25) oder der Dirac-Gleichung zusammenhängen, entzieht sich der Kenntnis des Autors. Da freie Quarks in der Natur nicht beobachtet werden können, macht es auch nicht viel Sinn, für freie Quarks Wellenfunktionen zu formulieren und nach einer Differentialgleichung zu suchen, die deren raum-zeitliche Entwicklung beschreibt, wie das bei der Klein-Gordon-Gleichung der Fall ist. Für weitere Informationen soll hier auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Klein-Gordon-Gleichung bei den allermeisten und vermutlich sogar bei allen Teilchen und Körpern eine Rolle spielt, die der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gehorchen. Das war ja letztlich auch zu erwarten, da die Klein-Gordon-Gleichung ja direkt aus dieser Beziehung hervorgeht. Sie gilt damit eben nicht nur in skalarer, sondern auch in vektorieller Formulierung. Die in der Literatur oft zu findende Aussage, die Klein-Gordon-Gleichung spiele nur mit skalarer Feldgröße bei Spin 0 -Teilchen eine Rolle, erweist sich damit - nach Ansicht des Autors – als falsch.

Gunter Berauer